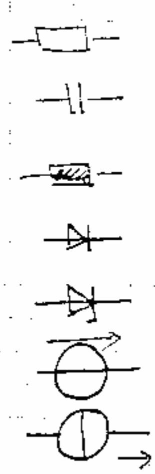
1. Elektrotechnische Grundlagen

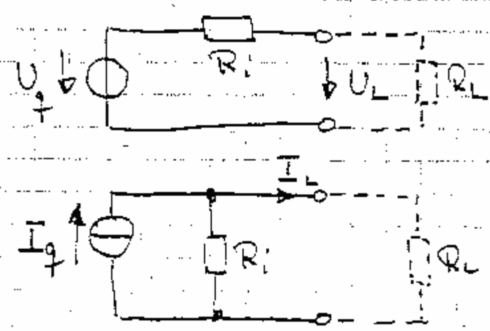
1.1 passive Bauelemente und U-/I-Quellen

Symbole



Symbole	R	Widerstand	Ω
	C	Kondensator	F, µF, ...
	L	Induktivität	H, mH, ...
	D	Dioden	
	ZD	Zenerdioden	
	U	Spannungsquelle	V, mV, ...
	I	Stromquelle	A, mA, ...

Spannungsquelle



ideal: $R_i = 0\Omega \rightsquigarrow U_L \neq f(R_L)$

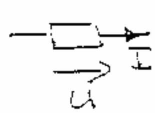
real: $R_i > 0\Omega \rightsquigarrow U_L = f(R_L)$

ideal: $R_i \to \infty\Omega \rightsquigarrow I_L \neq f(R_L)$

real: $R_i < \infty$ $I_L = f(R_L)$

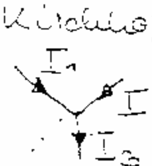
1.2 Lineare Netzwerke ($U \sim I$; $\omega_e = \omega_a$)

- ohmsches Gesetz



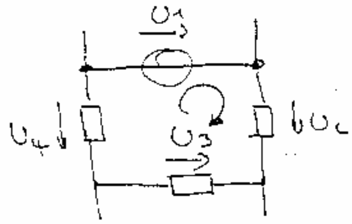
$\boxed{U = R I}$ $\quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$

- 1. Kirchhoffsches Gesetz (≙ Knotenpunktregel)



$\boxed{\sum I_i = 0}$ I-Richtungen beachten

• 2. Kirchhoffsches Gesetz



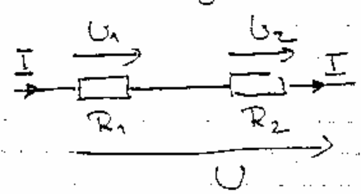
geschlossener Umlauf (= Masche)

$\boxed{\sum U_i = 0}$ U_i-Richtungen beachten

$U_1 + U_2 - U_3 - U_4 = 0$

Anwendungsfälle

• Spannungsteiler

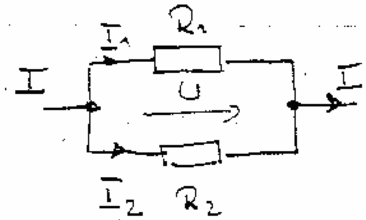


$I = \text{const}$

$U_1 = I R_1$; $U_2 = I R_2$; $U = U_1 + U_2 = I(R_1 + R_2)$

$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}}$ $\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$; $\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

• Stromteiler



$U = \text{const}$

$U = I_1 R_1$

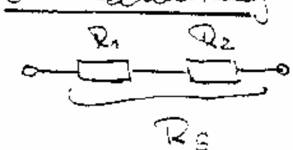
$U = I_2 R_2$

$I = I_1 + I_2$

$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}}$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{U/R_1}{U/R_1 + U/R_2} = \ldots = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \; ; \; \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

• Serienschaltung

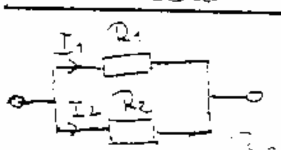


$R_S = U / I$

$U = I R_1 + I R_2$

$\boxed{R_S = R_1 + R_2}$

• Parallelschaltung



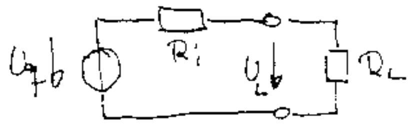
$R_P = U / I$

$I = I_1 + I_2$

$U = I_1 R_1$; $U = I_2 R_2$

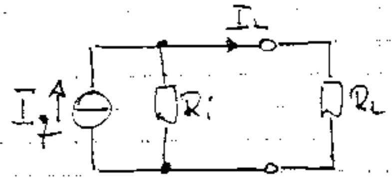
$\boxed{R_P = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$

reale Spannungsquelle ($R_i > 0\,\Omega$)



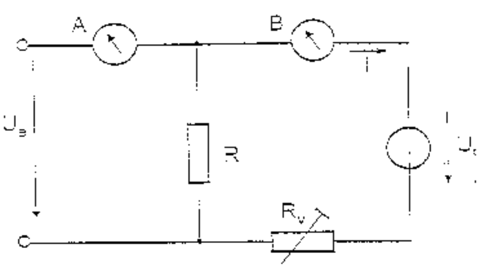
$$U_L = U_q \frac{R_L}{R_i + R_L} = U_q \frac{1}{1 + R_i/R_L}.$$

reale Stromquelle ($R_i < \infty\,\Omega$)



$$I_L = I_q \frac{\frac{R_L R_i}{R_L + R_i}}{R_L} = I_q \frac{1}{1 + R_L/R_i}.$$

Beispiel



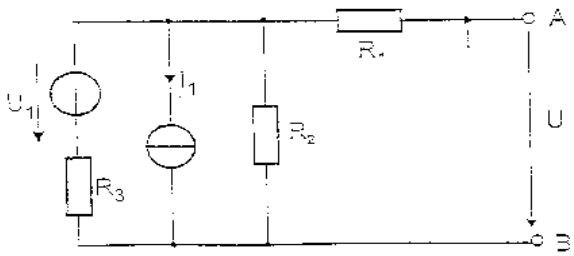
Tipp: Orientierungssinn von Strömen, Spannungen im NW

- Zählpfeilsystem: pos. Ergebnis ⇝ Zählpfeil = Richtungspfeil
  neg. " ⇝ U, I sind entgegengesetzt
- Richtungspfeilsystem: zeigt die tatsächliche U, I-Richtung an

Ideal wäre es, das Richtungspfeilsystem zu wählen, was in NW mit mehreren Quellen oft nicht erkennbar ist.

Fall: Netzwerk mit mehreren Quellen

Beispiel



Superpositions-Prinzip (nur für lineare NW!)

Ziel: einfache Berechnung linearer NW mit mehreren Quellen

Vorgehen: sei gesuchte Größe $\overbrace{Y}^{U \text{ oder } I} = f(\text{Quelle 1, Quelle 2}, \dots)$

⇝ Quelle 1 betrachten, alle anderen zu Null ⇝ Y_1

⇝ Quelle 2 betrachten, " ⇝ Y_2

usw.

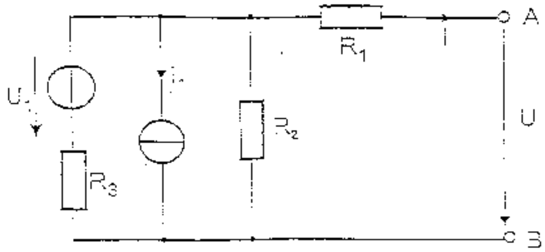
⇝ gesuchte Größe U oder I: $Y = \sum Y_i$

beachten: nicht betrachtete U-Quellen ⇝ als KS (Kurzschluß)

I-Quellen ⇝ als U (Unterbrechung)

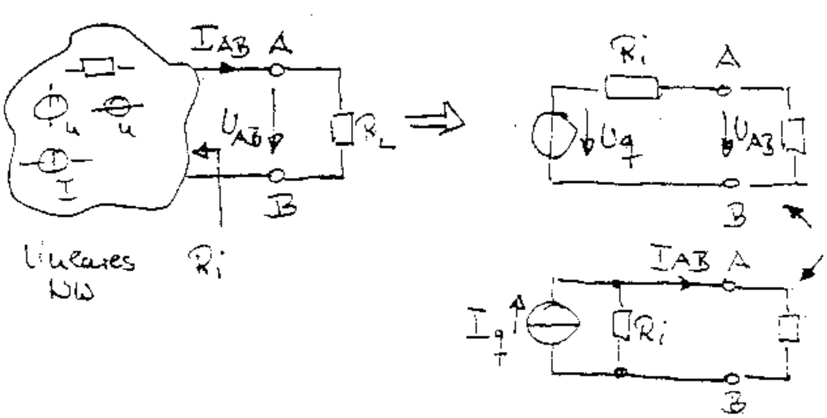
Ersatzschaltungen

Beispiel



Ersatzschaltbild bzgl. der Klemmen A – B

Ziel: Spannung bzw. Strom eines umfangreicheren linearen NW bzgl. der Klemmen mit Hilfe einer einfachen Ersatz-Spgs-quelle bzw. Ersatzstromquelle berechnen mit minimalem Rechenaufwand



- Innenwiderst. R_i
- Leerlaufspg. U_q
- Kurzschlußstrom I_q

$$U_{AB} = U_q - I_{AB} R_i$$

$$U_q = I_q R_i$$

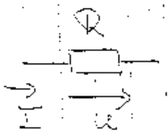
$$I_{AB} = I_q - \frac{U_{AB}}{R_i}$$

für R_i: U-Quellen als KS, I-Quellen als Leerlauf betrachten

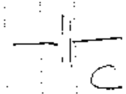
1.3 Lineare UIRLC-Netzwerke

1.3.1 Berechnung im Zeitbereich

Zeitbereich

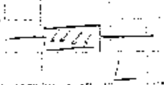


$u(t) = i(t) R$



$Q = C u = \int i \, dt$

$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i \, dt$



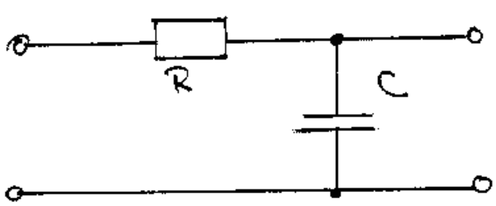
$u_L(t) = + L \frac{di}{dt}$

Beispiel: Kondensator C

$i_C(t) = \hat{I} \sin \omega t$

$u_C = \frac{1}{C} \int i \, dt = - \frac{1}{C} \frac{1}{\omega} \cos \omega t = \ldots \cdot \sin(\omega t - 90°)$

Beispiel: RC-Kombination



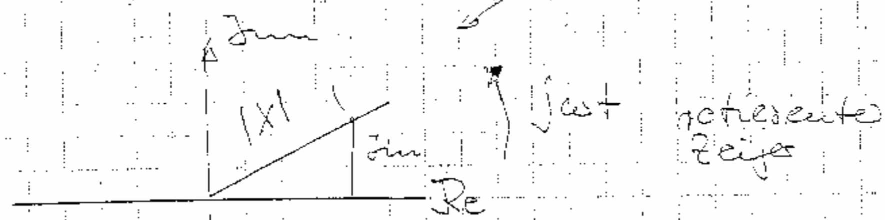
1.3.2 Berechnung in komplexer Ebene

- Zeitbereich: $x(t) = \hat{X}\,\sin(\omega t+\varphi) = \Im\{\underline{X}\}$

  $\hat{X}\,\cos(\omega t+\varphi) = \Re\{\underline{X}\}$

- Komplexe Ebene: mit $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$

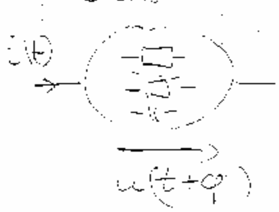
$$x^*(t) = \hat{X}\,e^{j(\omega t+\varphi)} = \hat{X}\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}$$



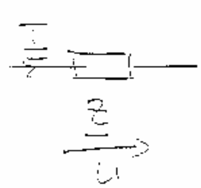
$$\boxed{\begin{aligned}\underline{X} &= X\,e^{j\varphi} = \Re\{\underline{X}\} + j\,\Im\{\underline{X}\}\\ |\underline{X}| &= \sqrt{\Re^2 + \Im^2}\\ \varphi &= \arctan\frac{\Im}{\Re}\end{aligned}}$$

- Komplexer Widerstand

Zeitbereich



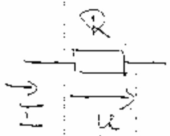
Komplex



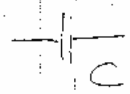
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = |\underline{Z}|\,e^{j\varphi_{UI}}$$

Komplexe Rechnung bei Bauelementen R, C, L

Zeitbereich | Komplex $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$

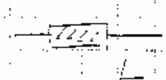


$u(t) = i(t) R$ | $\underline{U} = R \cdot \underline{I}$



$Q = C u_c = \int i\,dt$ | $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}}$

$u_c(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt$ | $\underline{U}_c = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$



$u_L(t) = +L\frac{di}{dt}$ | $\boxed{\underline{Z}_L = j\omega L}$

$\underline{U} = j\omega L\,\underline{I}$

$$\boxed{\begin{aligned} \int dt &\;\hat{=}\; \frac{1}{j\omega} \\ d/dt &\;\hat{=}\; j\omega \end{aligned}}$$

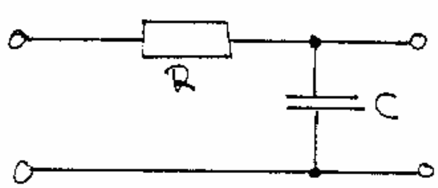
Beispiel: Kondensator C

$i_c(t) = \hat{I}\sin\omega t$

$u_c = \frac{1}{C}\int i\,dt = -\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{\omega}\cos\omega t = \dots \sin(\omega t - 90°)$

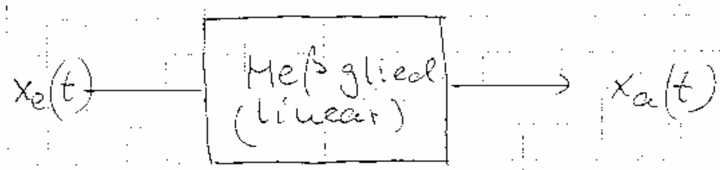
$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}$; $\varphi = \arctan\frac{Im}{Re} \to \infty \} \varphi = -90°$

Beispiel: RC-Kombination



1.4 Dynamisches Verhalten von Messgliedern

Aufgabenstellung



• **Zeitbereich**

$$\underbrace{a_0 x_a + a_1 \dot{x}_a}_{\text{VZ-Glied 1. Ordnung, } PT_1\text{-Glied}} + a_2 \ddot{x}_a + \ldots = b\, x_e(t)$$

VZ-Glied 1. Ordnung
PT$_1$-Glied

VZ-Glied 2. Ordnung
PT$_2$-Glied

$\boxed{\text{Ziel: } x_a(t) \text{ bei geg. } x_e(t)}$

• **Komplex**

$\frac{1}{j\omega C}$, $j\omega L$,

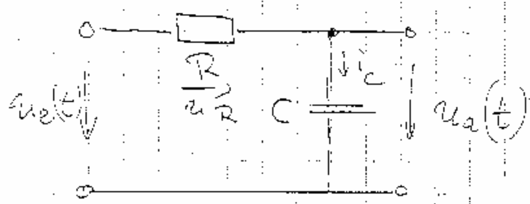
$\underline{X}_a(f)$

$\boxed{\underline{X}_a(f),\ \underline{G}(f)}$

anregende Funktion	Antwort-Funktion
Sinus	• Sinusantwort
	• Amplitudengang, Phasengang } Frequenzgang (Bodediagramm
Sprungfunktion	• Sprungantwort oder Übergangsfunktion $h(t)$
Impulsfunktion	• Impulsantwort, Gewichtsfunktion $g(t)$

1.4.1 Zeitbereich

b) Verzög. glied 1. Ordn. / PT1-Glied (Tiefpaß) (Integrator)



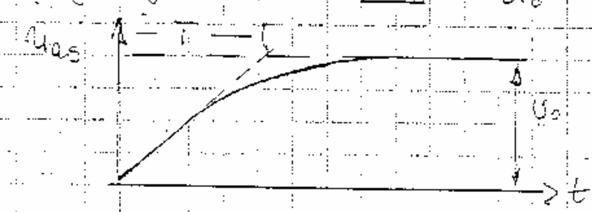
$-u_e + u_R + u_a = 0$; $u_R = iR$; $i = C\frac{du_a}{dt}$

$u_a + RC\frac{du_a}{dt} = u_e$ mit $T = RC$

$$\boxed{u_a + T\dot{u}_a = u_e}$$ DGL

- Sprungantwort $u_{a_s}(t) = U_0\left(1 - e^{-t/T}\right)$ in V

Übergangsfkt $\underline{h(t)} = \frac{u_{as}}{U_0} = \underline{1 - e^{-t/T}}$

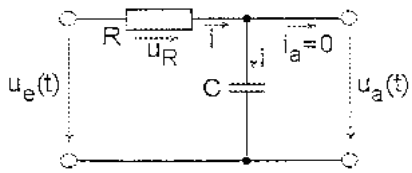


- Impulsantwort u_{a_I}

Gewichtsfkt $\underline{g(t) = \frac{u_{aI}}{A} = \frac{1}{T}e^{-t/T}}$

c) Meßglied 1. Ordnung mit Hochpaßverhalten (Differenzierer)

→ siehe Übung 2

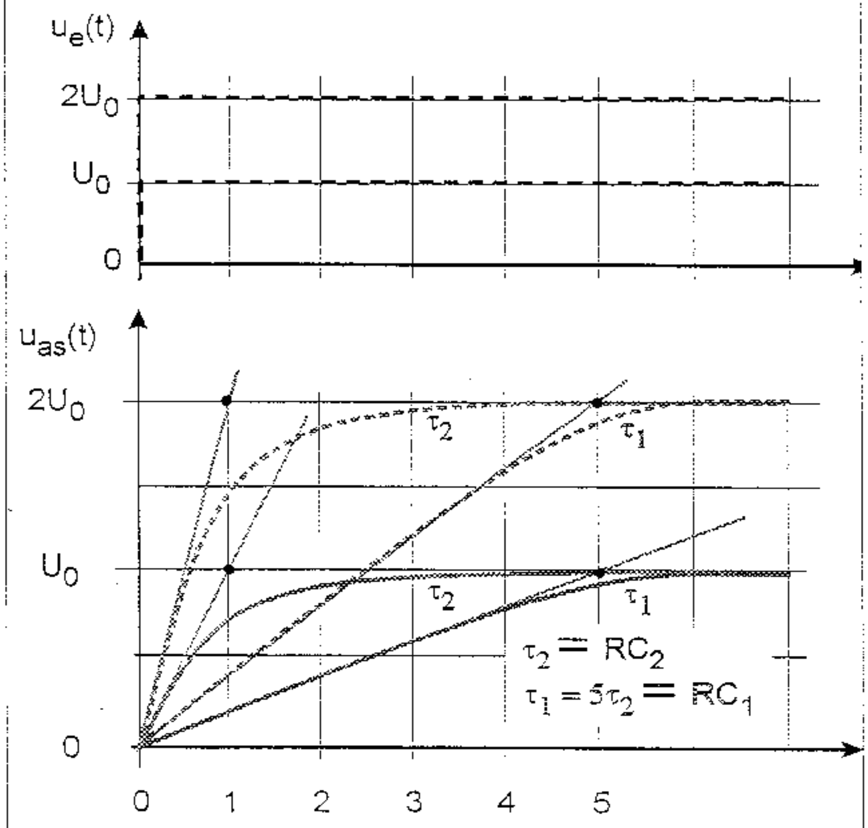
<table>
<tr>
<td colspan="2">


$u_R + u_a = u_e$; $i_R = i_C = i$; $u_R = iR$;

$u_a = u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \rightarrow i = C\dot{u}_a$;

$\boxed{\Rightarrow RC\,\dot{u}_a + u_a = u_e}$
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">**Übergangsfunktion Sprungantwort**</td>
<td>

$\boxed{u_{as}(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad mit\ \tau = RC}$

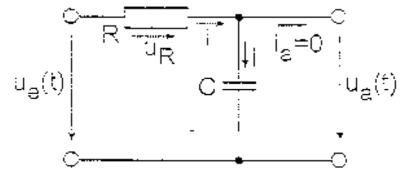
$\boxed{h(t) = u_{as}(t)/U_0 = (1 - e^{-t/\tau})}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>**Verhalten des Messgliedes**</td>
<td>

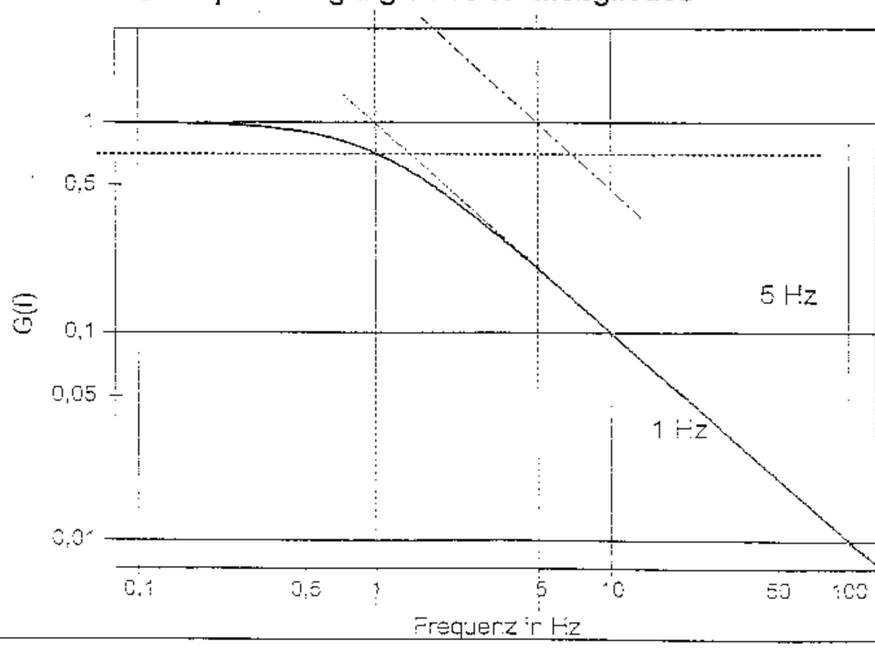
$f \ll f_g \Rightarrow$ Tiefpaßverhalten, da G ($f \ll f_g$) ≈ 1;

$f \ll f_g \Rightarrow$ Integrierer, da $\underline{G}$ ($f \gg f_g$) ≈ $1/j\omega$
</td>
</tr>
</table>

1.4.2 Komplexe Ebene, Frequenzbereich

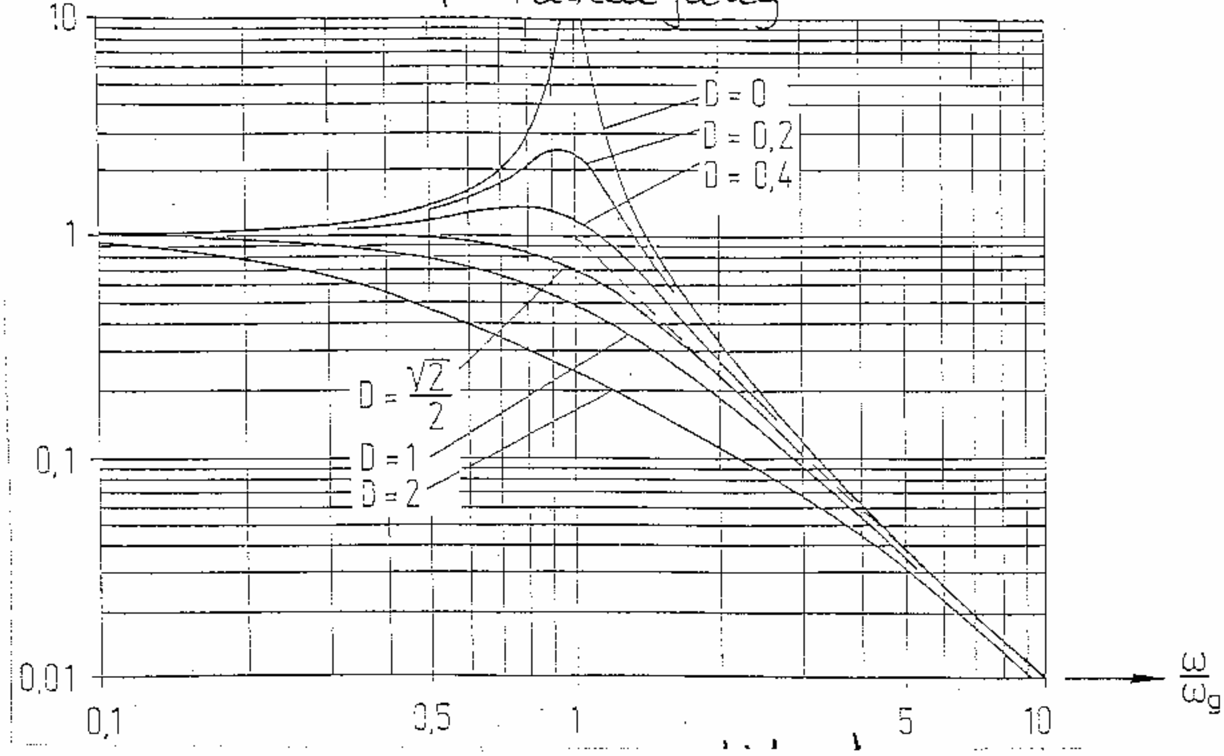
Verzögerungsglied 1. Ordnung (Tiefpass, Integrierer)	
Komplexer Frequenzgang $\underline{G}$	$\underline{G} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{R+\underline{Z}_C} = \frac{1}{1+\frac{R}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j2\pi fRC}$
Amplitudengang G	$G = \lvert\underline{G}\rvert = \sqrt{\mathrm{Im}^2+\mathrm{Re}^2} = \sqrt{\frac{1}{1-(\omega RC)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-(2\pi fRC)^2}}$
Grenzfrequenz ω_g, f_g bei: Re{$\underline{G}$} = Im{ $\underline{G}$ } $\omega_g RC = 1 \Rightarrow$	$G = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}$; $\omega_g = \frac{1}{RC}$; $f_g = \frac{1}{2\pi RC}$

Amplitudengang eines TP-Meßgliedes

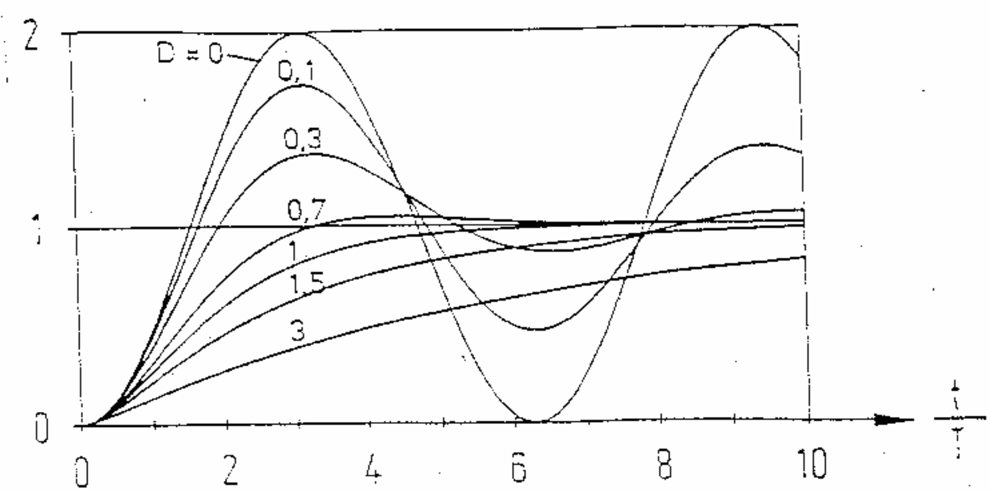


1.4.3 System 2. Ordnung

Amplitudengang



Sprungantwort



1.5 Beziehungen zwischen den Antwortfunktionen

a) Impulsantwort $\leftrightarrow$ Sprungantwort

Gewichtsfunktion $\leftrightarrow$ Übergangsfunktion

$g(t)$ $\quad$ $h(t)$

$$\boxed{g(t) = \frac{d\,h(t)}{dt}}$$

Tiefpaß 1. Ordnung:

$$g(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/T}\right) = \frac{1}{T}\, e^{-t/T}.$$

b) Sinusantwort $\leftrightarrow$ Impulsantwort

Frequenzgang $\leftrightarrow$ Gewichtsfunktion

$G(j\omega)$ $\quad$ $g(t)$

$$\boxed{\underline{G}(j\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

Tiefpaß 1. Ordnung:

$$G(j\omega) = \frac{1}{T}\int_0^{\infty} e^{-t/T}\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int e^{-(j\omega + \frac{1}{T})t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\, \frac{-1}{j\omega + \frac{1}{T}}\, e^{-(j\omega + \frac{1}{T})t}\Big|_0^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{T}\, \frac{-1}{j\omega + \frac{1}{T}} \cdot 1 = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$